www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

(Les questions précédées d'un astérisque sont considérées comme étant plus difficiles)

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}_+$, et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le cas. Le plus souvent, la variable décrivant $\mathbb{R}_+$ est notée t. Une fonction h est dite périodique, de période $\sigma > 0$, si on a $h(t + \sigma) = h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Le problème est consacré à l'étude de l'équation différentielle :

$$(*) \qquad x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$$

où a et b sont des fonctions continues périodiques, *réelles*, de période commune $\tau > 0$ fixées, et où la fonction inconnue x, de classe $\mathscr{C}^2$, est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

PARTIE I

La partie I est consacrée à des généralités sur l'espace vectoriel E (sur $\mathbb{C}$) des fonctions x solutions de l'équation (*). On note A la fonction définie par :

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds .$$

1. Pour $x, y \in E$ on définit la fonction $W_{x,y}$ par : $\quad W_{x,y}(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix}$

   a. Calculer la dérivée de $W_{x,y}$.

   b. Montrer que l'on a $W_{x,y}(t) = W_{x,y}(0)\,e^{-A(t)}$.

2. Soit $\mathscr{T}$ l'application qui, à une fonction z, associe la fonction $\mathscr{T}z : t \mapsto z(t + \tau)$, où τ est la période commune de a et b.

   a. Montrer que $\mathscr{T}$ induit un endomorphisme de E. On notera T cet endomorphisme, s la somme de ses valeurs propres et p leur produit (en tenant compte de leur multiplicité).

   b. Montrer que p est égal à $e^{-A(\tau)}$ (et est donc réel).

   c. On désigne par u, v les éléments de E tels que :

   $$u(0) = v'(0) = 1, \qquad u'(0) = v(0) = 0 .$$

   Montrer que s est égal à $u(\tau) + v'(\tau)$; en déduire que s est réel.

3. On désigne par Λ l'ensemble des valeurs propres de T, et, pour $\lambda \in \Lambda$, par E_λ le sous-espace propre associé à λ.

   a. Montrer que, pour $\lambda \in \Lambda$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ (non nécessairement unique) tel que tout $x \in E_\lambda$ soit de la forme :

   $$x(t) = e^{\mu t} q(t).$$

   où q est une fonction (dépendant de x) périodique, de période τ.

   b. Déterminer la partie réelle de μ en fonction de $\lambda \in \Lambda$.

   c. Soient $\lambda \in \Lambda$ et n un entier $\geqslant 1$. Montrer que les éléments de E_λ sont périodiques, de période $n\tau$, si et seulement si λ est une racine n-ième de l'unité.

PARTIE II

La partie II est consacrée à la stabilité relativement aux conditions initiales. La notion de sous-espace stable introduite ci-dessous a rapport avec la notion d'équilibre stable en mécanique, mais n'a rien à voir avec la notion de sous-espace stable pour un endomorphisme.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in E$, on pose :

$$N_t(x) = |x(t)| + |x'(t)|$$

et on dit qu'un sous-espace F de E est *stable* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in F \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad [N_0(x) < \delta \Rightarrow N_t(x) < \varepsilon].$$

1. Soit F un sous-espace de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   a. F est stable ;

   b. Il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait :

   $$\forall x \in F \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad [N_t(x) \leqslant c\,N_0(x)].$$

   c. Pour tout $x \in F$, x et x' sont bornées (en module) sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit λ une valeur propre de T. Montrer que E_λ est stable si et seulement si on a $|\lambda| \leqslant 1$.

3. On suppose dans cette question que la fonction a est de classe $\mathscr{C}^1$ et que b est sa dérivée a'.

   a. Trouver la solution générale de (*).

   b. Calculer s en fonction de p.

   c. Montrer que E est stable si $A(\tau)$ est > 0 et n'est pas stable si $A(\tau)$ est < 0.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Dans la partie III, on étudie de manière détaillée le cas où la fonction a est nulle et où la fonction b est de la forme :

$$b = (1 + \gamma q)$$

γ étant un paramètre réel $\geqslant 0$ et q une fonction continue réelle, de période τ. L'équation (*) prend alors la forme :

(**) $$x'' + (1 + \gamma q)x = 0.$$

On pose $k = |q|$, et on note Q et K les fonctions définies par :

$$Q(t) = \int_0^t q(s)\,ds. \qquad K(t) = \int_0^t k(s)\,ds.$$

1. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans C. Montrer que toute solution x de l'équation différentielle :

$$x'' + x = g$$

est de la forme :

(1) $$x(t) = x(0)\cos t + x'(0)\sin t + \int_0^t \sin(t - s)\ g(s)\,ds.$$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la suite (f_n) de fonctions définies par récurrence comme suit :

$$f_0'' + f_0 = 0, \qquad f_0(0) = \alpha, \qquad f_0'(0) = \beta$$

et pour $n \geqslant 1$:

$$f_n'' + f_n = -q f_{n-1}, \qquad f_n(0) = f_n'(0) = 0.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

(2) $$|f_n(t)| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ \frac{K^n(t)}{n!}.$$

En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la série entière (en $z \in C$) :

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n(t)\, z^n$$

a un rayon de convergence infini.

b. Montrer que la fonction f définie par :

(3) $$f(t) = \sum_{n \geqslant 0} f_n(t)\,\gamma^n$$

est l'unique solution x de (**) telle que $x(0) = \alpha$ et $x'(0) = \beta$.

3. On désigne par (u_n) la suite de fonctions (f_n) correspondant à $\alpha = 1, \beta = 0$, et par (v_n) celle correspondant à $\alpha = 0, \beta = 1$.

a. Montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$,

(4) $$|u_n(t) + v_n'(t)| \leqslant \int_0^t \sqrt{u_{n-1}^2(s) + v_{n-1}^2(s)}\ \ k(s)\,ds.$$

b. Montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$,

(5) $$\sqrt{u_n^2(t) + v_n^2(t)} \leqslant \frac{K(t)^n}{n!}$$

[on pourra considérer la fonction complexe $u_n + i v_n$].

4. On va faire maintenant varier le paramètre γ : on note désormais E^γ l'espace des solutions de (**). T. l'endomorphisme défini au I.2.*a.*, et s_γ (resp p_γ) la somme (resp le produit) de ses valeurs propres.

a. Montrer que l'on a :

(6) $$|s_\gamma| \leqslant 2|\cos\tau| + e^{K(\tau)\gamma} - 1.$$

b. Montrer que l'on a :

(7) $$s_\gamma = 2\cos\tau - \gamma Q(\tau)\sin\tau + 0(\gamma).$$

5. Montrer que E_γ est stable pour $\gamma = 0$ et pour :

(8) $$0 < \gamma < \frac{\mathrm{Ln}(3 - 2|\cos\tau|)}{K(\tau)}.$$

Donner graphiquement l'allure de la zone de stabilité :

$$Z = \{(\tau, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \gamma \text{ vérifie (8)}\}$$

ainsi définie en portant τ en abscisse et γ en ordonnée.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail